Ecoles privées ERRAJA

Nom : Bilkiss / Ahmed
N° : 1390
class : 7D1

correction du exercice 6 sur la suites

Exercice 6

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$U_0 = 0, \quad U_{n+1} = \sqrt{6+U_n}; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ ;}$$

1) Calculer U_1 , U_2 , U_3.

2) Démontrer par récurrence que la $U_n \leq 3$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ . .

3) Montrer que (U_n) est croissante ; conclure.

4) Montrer que $3 - U_{n+1} \leq \frac{1}{3}(3 - U_n)$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ . .

5) Démontrer par récurrence que : $3 - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ . .

6) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Solution :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{6+U_n} \end{cases}$$

1)- $U_1 = \sqrt{6+U_0} = \sqrt{6}$

$U_2 = \sqrt{6+U_1} = \sqrt{6+\sqrt{6}}$

$U_3 = \sqrt{6+U_2} = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$

2) - pour $n=0$

$U_0 = 0 \leq 3$ est vrai

on suppose que $U_n < 3$ et on montre que $U_{n+1} \leq 3$

on a : $U_n \leq 3$

$6 + U_n \leq 6+3 \Rightarrow U_n + 6 \leq 9$

$\sqrt{6+U_n} \leq \sqrt{9} = 3$

$U_{n+1} \leq 3$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq 3$

3) a) $U_{n+1} - U_n = \sqrt{6+U_n} - U_n$

$$= \frac{(\sqrt{6+U_n} - U_n)(\sqrt{6+U_n} + U_n)}{\sqrt{6+U_n} + U_n}$$

$$= \frac{\sqrt{6+U_n} - U_n^2}{\sqrt{6+U_n} + U_n} = \frac{6 + U_n^2}{\sqrt{6} + U_n + U_n}$$

1

$$-x^2+x+6=0$$
$$1^2-4(-1\times 6) = 25 \qquad x_1 = \frac{-1+5}{2(-1)} = -2$$
$$x_2 = \frac{-1-5}{-2} = 3$$

$$-x^2+x+6 = (x+2)(x-3)$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{(u_n+2)(3-u_n)}{\sqrt{6+u_n}+u_n} \qquad u_{n+1}-u_n \geq 0$$

$\Rightarrow$ (u_n) est croisante (u_n) est majoré par 3 donc elle est converagente

b) calculer la limite de (u_n) on a $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$ par passage à la limite on trouve

$$\ell = \sqrt{6+\ell}$$
$$\ell^2 = 6+\ell$$
$$\ell^2-\ell-\ell=0$$
$$\Delta = 25$$
$$\ell_1 = \frac{1+5}{2} = 3$$
$$\ell_2 = \frac{1-5}{2} = -2 < 0 \text{ rejetes}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} u_n = 3}$$

4) $$3-u_{n+1} > 3-\sqrt{6+u_n} = \frac{(3-\sqrt{6+u_n})(3+\sqrt{6+u_n})}{3+\sqrt{6+u_n}}$$

$$= \frac{3^2-(6+u_n)}{3+\sqrt{6+u_n}} = \frac{3-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}} = \frac{1}{3+\sqrt{6+u_n}}(3-u_n)$$

$$\sqrt{6+u_n} \geq 0 \qquad 3+\sqrt{6+u_n} \geq 3$$

2

$$\frac{1}{3+\sqrt{6+u_n}} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3+\sqrt{6+u_n}}(3-u_n) \leq \frac{1}{3}(3-u_n)$$

$$3-u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(3-u_n)$$

5) pour $n=0$

$3-u_0 = 3-0=3$

$(1/3)^{0-1} = (1/3)^{-1} = 3/1 = 3$

$3-u_0 \leq (1/3)^{0-1}$ est vrai pour $n=0$

on suppose que $3-u_n \leq (1/3)^{n-1}$ et on montre que

$3-u_{n+1} \leq (1/3)^n$ or $3-u_n \leq (1/3)^{n-1}$

$$1/3(3-u_n) \leq 1/3\,(1/3)^{n-1}$$

$3-u_{n+1} \leq 1/3(3-u_n) \leq (1/3)^n \Rightarrow 3-u_{n+1} \leq (1/3)^n$ donc

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 3-u_n \leq (1/3)^{n-1}$

6) $0 \leq 3-u_n \leq (1/3)^{n-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (1/3)^{n-1} = 0$ car $-1 < 1/3 < 1$

D'après le TH du gen der m

$$\lim_{x\to+\infty} 3-u_n = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} u_n = 5}$$